1 – ***MATEMÁTICA***

Paulo Tadeu de Almeida Campos, Olímpio Hiroshi Miyagaki, Lana Mara Rodrigues dos Santos e Marinês Guerreiro

1.1 – **QUESTÕES OBJETIVAS**

01. A soma das raízes das equações

$$\log_5(4x-3) + \log_5(4x-7) = 1 \quad \text{e} \quad 7^{x+1} - 7^x = 294$$

vale:

a) 4
b) 3
c) 2
d) 5
e) 6

CONTEÚDO:

FUNÇÕES – Função logarítimica. Propriedades dos logaritmos. Domínio. Função exponencial.

RESPOSTA: Letra (a).

RESOLUÇÃO:

Como as funções logarítmicas são definidas apenas para números reais positivos, deve-se ter $4x-7>0$, isto é, $x>7/4$.

Por outro lado, usando propriedades dos logarítmos, tem-se que $\log_5(4x-3)\cdot(4x-7) = \log_5 5$. Como a função logarítmica é injetiva, $(4x-3)\cdot(4x-7)=5$. As raízes desta equação são $1/2$ e 2. Destas, apenas 2 é maior do que $7/4$.

A equação $7^{x+1} - 7^x = 294$ é equivalente a $7^x(7-1) = 6\cdot 7^2$. Portanto, $x=2$ é a solução da equação exponencial.

Assim, a soma das raízes das equações propostas é 4.

02. Na matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem 2, os elementos a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22}, nesta ordem, apresentam a seguinte propriedade: "Os três primeiros estão em progressão aritmética e os três últimos em progressão geométrica, ambas de mesma razão". Se $a_{12} = 2$, o determinante de A vale:

a) 4
b) – 4
c) 0
d) 8
e) – 8

CONTEÚDO:

NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINITA – Matrizes. Determinantes. SUCESSÃO E SÉRIES REAIS – Sucessões aritméticas e sucessões geométricas.

RESPOSTA: Letra (e).

RESOLUÇÃO:

Seja r a razão comum das progressões. Os elementos a_{11}, a_{12} e a_{21} estão em progressão aritmética, logo, $a_{11} = a_{12} - r$ e $a_{21} = a_{12} + r$. Os elementos a_{12}, a_{21} e a_{22} estão em progressão geométrica, logo, $a_{21} = a_{12} \cdot r$ e $a_{22} = a_{12} \cdot r^2$.

Como $a_{12} = 2$, o elemento a_{21} satisfaz as igualdades $a_{21} = 2 + r$ e $a_{21} = 2 \cdot r$. Logo, $r = 2$. Consequentemente, os elementos da matriz A são $a_{11} = 0$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 4$ e $a_{22} = 8$. Portanto, $\det A = -8$.

03. No Parque de Diversões *Dia Feliz*, os ingressos custam R$ 10,00 para adultos e R$ 6,00 para crianças. No último domingo, com a venda de 400 ingressos, a arrecadação foi de R$ 3.000,00. A razão entre o número de adultos e crianças pagantes foi:

a) 2 / 5
b) 3 / 4
c) 3 / 5
d) 2 / 3
e) 4 / 5

CONTEÚDO:

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES ALGÉBRICAS – Sistemas de equações.

RESPOSTA: Letra (c).

RESOLUÇÃO:

Considerando x o número de adultos e y o número de crianças presentes no parque, no último domingo, obtém-se o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ 10x + 6y = 3000 \end{cases}.$$

Como a solução do sistema é $x = 150$ e $y = 250$, a razão entre o número de adultos e crianças é 150 / 250 = 3 / 5.

04. Considere as seguintes afirmativas:

I. $2 + 5i - (1+i)^2 = 2 + 7i$

II. 0,333... · 0,666... = 0,222...

III. $3\log 36 - 6\log 2 = 6\log 3$

IV. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \sec\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sec\frac{\pi}{6} = 2$

Assinalando V para as afirmativas verdadeiras e F para as falsas, obtém-se a seguinte seqüência:

a) F, V, V, F.
b) V, F, F, F.
c) F, V, F, V.
d) F, V, V, V.
e) V, F, V, V.

CONTEÚDO:

NÚMEROS – Números complexos: Operações fundamentais, potência de números complexos. Números racionais: representação decimal dos números racionais. FUNÇÕES – Função logarítimica. Propriedades dos logaritmos. Funções circulares. Equação trigonométrica.

RESPOSTA: Letra (d).

RESOLUÇÃO:

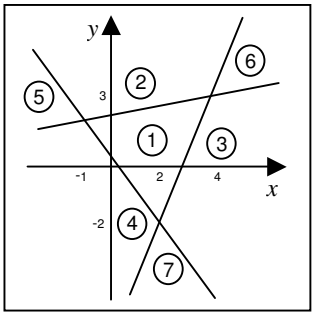
I. Como $i^2 = -1$, $2 + 5i - (1+i)^2 = 2 + 5i - (1 + 2i - 1) = 2 + 3i$ ..
Portanto, a afirmação I é FALSA.

II. As dízimas periódicas simples 0,333... e 0,666... têm geratrizes $\frac{3}{9}$ e $\frac{6}{9}$, respectivamente. O produto dessas frações é $\frac{2}{9}$ que gera a dízima 0,222... .
Portanto, a afirmação II é VERDADEIRA.

III. Usando propriedades de logarítmos, têm-se $3\log 36 - 6\log 2 = 3\log 6^2 - 6\log 2 = 6\log 6 - 6\log 2 = 6\log 3$ ..
Portanto, a afirmação III é VERDADEIRA.

IV. Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $\sec\frac{\pi}{3} = 2$,
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \sec\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sec\frac{\pi}{6} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot \sec\frac{\pi}{6} = 2 - 0 = 2$.
Portanto, a afirmação IV é VERDADEIRA.

05. Na figura abaixo, estão numeradas as regiões determinadas pelas inequações de 1º grau: $x - 5y + 11 < 0$, $4x + 3y - 2 > 0$ e $5x - 2y - 14 < 0$.



As coordenadas dos pontos (x, y) que verificam, simultaneamente, as inequações, pertencem à região:

a) 1
b) 5
c) 3
d) 4
e) 2

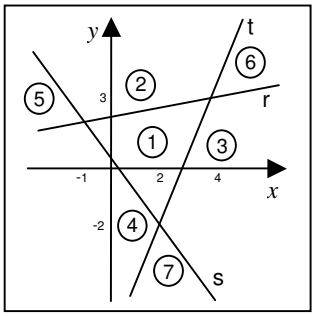
CONTEÚDO:

FUNÇÕES – Função afim. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES ALGÉBRICAS – Resolução de inequação de 1º grau.

RESPOSTA: Letra (e).

RESOLUÇÃO:

Escolhendo um par conveniente de pontos (as interseções com os eixos coordenados, por exemplo), são identificadas, na figura abaixo, as retas r: $x - 5y + 11 = 0$, s: $4x + 3y - 2 = 0$ e t: $5x - 2y - 14 = 0$.



Os pontos do plano cartesiano, situados sobre a reta r: $x - 5y + 11 = 0$, têm ordenadas $y = \frac{1}{5}x + \frac{11}{5}$. Como a inequação $x - 5y + 11 < 0$ é equivalente a $y > \frac{1}{5}x + \frac{11}{5}$, os pontos do plano que satisfazem esta inequação estão situados acima da reta r, isto é, nas regiões (2), (5) e (6). Analogamente, a inequação $4x + 3y - 2 > 0$ é válida nas regiões (1), (2), (3) e (6); e a inequação $5x - 2y - 14 < 0$ é válida nas regiões (1), (2), (4) e (5). Portanto, os valores de x e y que verificam, simultaneamente, as três inequações são as coordenadas dos pontos da região (2).

06. Uma TV que custa R$ 600,00 é vendida em duas parcelas de R$ 300,00, sendo a primeira parcela paga no ato da compra. Se o cliente pagar à vista, terá um desconto de 10% sobre o preço da TV. A taxa de juros cobrada pela loja no pagamento a prazo é de:

a) 10%
b) 15%
c) 20%
d) 25%
e) 30%

CONTEÚDO:

NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA – Porcentagem. Juros simples.

RESPOSTA: Letra (d).

RESOLUÇÃO:

O preço da TV à vista é R$ 540,00. Tendo pago R$ 300,00 no ato da compra, o juro incidirá sobre a diferença

R$ 540,00 – R$ 300,00 = R$ 240,00.

Seja x a taxa de juros. Então $240 + 240x = 300$, o que corresponde a $x = 0{,}25$. Logo, a taxa de juros é de 25%.

07. Simplificando a expressão $\dfrac{3\sqrt{x} - x\sqrt{3}}{3 - x}$, $x \neq 3$, obtém-se $\dfrac{w}{x\sqrt{3} + 3\sqrt{x}}$, onde o numerador w é:

a) $3 - x$

b) $3 + x$

c) $3 + \sqrt{x}$

d) $3x$

e) $3\sqrt{x}$

CONTEÚDO:

CÁLCULO ALGÉBRICO – Cálculo de potências e de radicais. Operações com expressões algébricas.

RESPOSTA: Letra (d).

RESOLUÇÃO:

Multiplicando a expressão $\dfrac{3\sqrt{x} - x\sqrt{3}}{3 - x}$ pelo conjugado do numerador, têm-se:

$$\frac{3\sqrt{x} - x\sqrt{3}}{3 - x} \cdot \frac{3\sqrt{x} + x\sqrt{3}}{3\sqrt{x} + x\sqrt{3}} = \frac{9x - 3x^2}{(3 - x)(3\sqrt{x} + x\sqrt{3})} = \frac{3x(3 - x)}{(3 - x)(3\sqrt{x} + x\sqrt{3})}.$$

Como $x \neq 3$, pode-se cancelar o fator comum e obter $\dfrac{3x}{3\sqrt{x} + x\sqrt{3}}$.

Logo, $w = 3x$.

08. Um copo, cujo interior tem o formato de um cone circular reto, estava cheio de licor. Ao degustar o licor, observou-se que, após o primeiro gole, a altura do líquido ficou reduzida à metade. O volume de licor ingerido no primeiro gole corresponde a uma fração do volume inicial. Sabendo que o volume do cone é dado por $V_{cone} = \dfrac{\pi}{3}(raio)^2 \cdot altura$, essa fração é:

a) $8/9$
b) $5/9$
c) $7/8$
d) $4/9$
e) $3/8$

CONTEÚDO:

GEOMETRIA NO ESPAÇO – Estudo dos sólidos: cone. Volume do cone.

RESPOSTA: Letra (c).

RESOLUÇÃO:

Considerando R, o raio da base do cone, H a altura do cone e r o raio da superfície do líquido, correspondendo à altura $\dfrac{H}{2}$, por semelhança de triângulos, tem-se que $\dfrac{R}{H} = \dfrac{r}{H/2}$, isto é, $r = \dfrac{R}{2}$.

Se V_i é o volume inicial e V_f é o volume após o primeiro gole, então

$$V_i = \frac{1}{3}\pi R^2 H \quad \text{e} \quad V_f = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{H}{2} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \frac{H}{2}.$$

Portanto, o volume ingerido, $V_i - V_f$, é dado por :

$$V_i - V_f = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi R^2 H \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{8}\left(\frac{1}{3}\pi R^2 H\right) = \frac{7}{8}V_i.$$

09. Considere as seguintes afirmativas sobre $P(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

I. $P(x) > 0$ para $-1 < x < 0$.

II. $P(x) = \dfrac{1}{2x+2} + \dfrac{1}{2x-2}$ para $x \neq \pm 1$.

III. $P\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{2}{3}$.

Pode-se afirmar que:

a) apenas I e II estão corretas.
b) todas estão corretas.
c) apenas I e III estão corretas.
d) apenas II e III estão corretas.
e) apenas uma está correta.

CONTEÚDO:

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES ALGÉBRICAS – Resolução de inequações de 1º e 2º graus. POLINÔMIOS – Definição. CÁLCULO ALGÉBRICO – Operações com expressões algébricas. NÚMEROS – Números racionais: operações fundamentais.

RESPOSTA: Letra (a).

RESOLUÇÃO:

I. O sinal de $P(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ pode ser obtido combinando os sinais dos polinômios $q(x) = x$ e $t(x) = x^2 - 1$.

```
- - - - - - - - - - - - - - - - |+ + + +  + + + + + + + +
                               0
+ + + + + + + |- - - - - - - - - - - - - |+ + + + + +
              -1                         1
- - - - - - - - |+ + + + |- - - - - - - |+ + + + + + +
                -1       0             1
```

Desse estudo de sinais, segue que $P(x) > 0$ no intervalo $-1 < x < 0$. Logo, a afirmação I está CORRETA.

II. Como

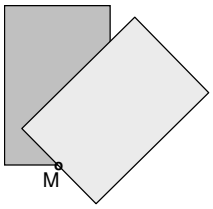
$$\frac{1}{2x+2} + \frac{1}{2x-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{x}{x^2-1},$$

a afirmação II está CORRETA.

III. $P\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3/2}{(3/2)^2 - 1} = \dfrac{3/2}{5/4} = \dfrac{6}{5}$. Logo, a afirmação III é FALSA.

Portanto, apenas as afirmações I e II estão CORRETAS.

10. Duas placas metálicas, medindo 4 cm de largura e 6 cm de comprimento, estão sobrepostas e fixadas no ponto médio M. Com um giro de 45° em uma das placas, obtém-se uma região poligonal comum às duas placas, conforme ilustra a figura abaixo.



A área dessa região poligonal, em cm^2, é:

a) $1 + 4\sqrt{2}$
b) $2 + 4\sqrt{2}$
c) $3 + 4\sqrt{2}$
d) $4 + 4\sqrt{2}$
e) $5 + 4\sqrt{2}$

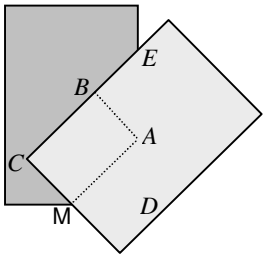
CONTEÚDO:

GEOMETRIA PLANA – Semi-retas, segmentos e ângulos. Retas paralelas. Triângulos. Relações métricas em triângulos. Área de polígonos.

RESPOSTA: Letra (d).

RESOLUÇÃO:

Sejam os pontos A, B, C, D e E marcados sobre os lados da região poligonal, de modo que $\overline{CB}$ // $\overline{MA}$ e $\overline{BA}$ // $\overline{CM}$, conforme ilustra a figura abaixo.



Como $\overline{CB}$ // $\overline{MA}$, têm-se $D\hat{M}A$ = 45° e no triãngulo ΔMDA, $\frac{AD}{MD} = tg\,45^{\circ} = 1$. Assim, $AD = MD = 2$.

Sendo ΔMDA um triângulo retângulo, tem-se $AM = 2\sqrt{2}$.

Como $\overline{CE}$ // $\overline{MA}$, têm-se $B\hat{E}A$ = 45° e no triângulo ΔEBA, $\frac{AB}{BE} = tg\,45^{\circ} = 1$ e, assim, $BE = AB = 2$.

Assim, a área do retângulo $MABC$ é $2 \cdot 2\sqrt{2}$.

Se cada um dos triângulos ΔMDA e ΔEBA tem área 2, a área da região poligonal comum às duas chapas é, então $4 + 4\sqrt{2}$.

11. Um farmacêutico dispõe de 4 tipos de vitaminas e 3 tipos de sais minerais e deseja combinar 3 desses nutrientes para obter um composto químico. O número de compostos que poderão ser preparados usando-se, no máximo, 2 tipos de sais minerais é:

a) 26
b) 30
c) 28
d) 32
e) 34

CONTEÚDO:

NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINITA – Cálculo combinatório, combinações.

RESPOSTA: Letra (e).

RESOLUÇÃO:

Podemos obter os seguintes compostos:

(I) $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$, sem sais minerais.

(II) $\binom{4}{2}\binom{3}{1}$ = 18, com um tipo de sal mineral e dois tipos de vitaminas.

(III) $\binom{4}{1}\binom{3}{2}$ = 12 com dois tipos de sais minerais e um tipo de vitamina.

Logo, poderão ser preparados 4 + 18 + 12 = 34 compostos usando-se, no máximo, 2 tipos de sais minerais.

12. Os números inteiros estão distribuídos em 4 conjuntos A_0, A_1, A_2 e A_3, de acordo com o seguinte critério: "O número inteiro x está no conjunto A_j se o resto da divisão de x por 4 é j". Por exemplo, 7 está no conjunto A_3, pois o resto da divisão de 7 por 4 é 3.

Considere as seguintes afirmativas:

I. Se $x \in A_1$ e $y \in A_3$, então $x + y \in A_0$.
II. Se $x \in A_2$ e $y \in A_1$, então $x - y \in A_2$.
III. Se $x \in A_2$ e $y \in A_2$, então $x \cdot y \in A_0$.

Assinalando V para as afirmativas verdadeiras e F para as falsas, obtém-se a seguinte seqüência:

a) V, F, V.
b) V, V, F.
c) F, V, F.
d) F, F, V.
e) V, V, V.

CONTEÚDO:
NÚMEROS – Números inteiros, divisibilidade.

RESPOSTA: Letra (a).

RESOLUÇÃO:
Listando os elementos dos conjuntos A_0, A_1, A_2 e A_3, têm-se

A_0 = {..., - 8, - 4, 0, 4, 8, ...}, A_1 = {...- 7, - 3, 1, 5, 9, ...},

A_2 = {..., - 6, - 2, 2, 6, 10, ...} e A_3 = {..., - 5, - 1, 3, 7, 11, ...}.

Assim, os elementos do conjunto A_0 são da forma $4a$, os do conjunto A_1 são da forma $4b+1$, os do conjunto A_2 são da forma $4c+2$ e os do conjunto A_3 são da forma $4d+3$, onde a, b, c e d são números inteiros.

I. Se $x \in A_1$ e $y \in A_3$, então $x+y=(4b+1)+(4d+3)=4(b+d+1)$. Como $b+d+1$ também é um inteiro, isto mostra que $x+y \in A_0$.
Portanto, a afirmação I é VERDADEIRA.

II. Se $x \in A_2$ e $y \in A_1$, então $x-y=(4c+2)-(4b+1)=4(c-b)+1$. Assim, $x-y \in A_1$.
Portanto, a afirmação II é FALSA.

III. Sejam x e y elementos do conjunto A_2. Como x e y não são necessariamente iguais, existem u e v inteiros tais que $x=4u+2$ e $y=4v+2$. Assim, $x \cdot y=(4u+2)(4v+2)=4(4uv+2u+2v+1) \in A_0$.
Portanto, a afirmação III é VERDADEIRA.

13. Um comerciante vendeu um produto X por R$ 230,00, obtendo um lucro de 15%, e um produto Y por R$ 100,00, obtendo um lucro de 25%. Com a venda dos dois produtos ele teve um lucro de, aproximadamente:

a) 12%
b) 18%
c) 16%
d) 14%
e) 10%

CONTEÚDO:

NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA – Números e grandezas proporcionais. Porcentagem. Juros simples.

RESPOSTA: Letra (b).

RESOLUÇÃO:

Sejam P e Q os preços de custo dos produtos X e Y, respectivamente. Assim,

$$P + 0{,}15P = 230 \quad \text{e} \quad Q + 0{,}25Q = 100.$$

Resolvendo essas equações, obtêm-se P = R$ 200,00 e Q = R$ 80,00.

Seja x a taxa de juros. Então x(P + Q) = 330. Assim, $x = \frac{330}{280}$ = 1, 178.

Portanto, o lucro foi de, aproximadamente, 18%.

14. Seja f a função real tal que $f(2x - 9) = x$ para todo x real. A igualdade $f(c) = f^{-1}(c)$ se verifica para c igual a:

a) 1
b) 9
c) 7
d) 3
e) 5

CONTEÚDO:

FUNÇÕES – Função inversa.

RESPOSTA: Letra (b).

RESOLUÇÃO:

Seja $g(x) = 2x - 9$. A igualdade $f(g(x)) = x$ mostra que f é a inversa de g. Logo, $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

A equação $f(c) = f^{-1}(c)$ é equivalente a $\frac{1}{2}c + \frac{9}{2}$ = $2c - 9$, cuja solução é c = 9.

15. Um chapéu, no formato de um cone circular reto, é feito de uma folha circular de raio 30 cm, recortando-se um setor circular de ângulo $\theta = 2\pi/3$ radianos e juntando os lados. A área da base do chapéu, em cm^2, é:

a) 120π
b) 100π
c) 110π
d) 130π
e) 140π

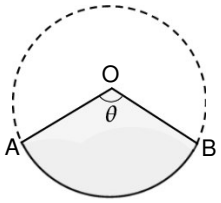
CONTEÚDO:

GEOMETRIA PLANA – Área do círculo. GEOMETRIA NO ESPAÇO – Estudo dos sólidos. Áreas de cones.

RESPOSTA: Letra (b).

RESOLUÇÃO:

Do enunciado do problema, considere a figura abaixo, onde o setor circular a ser cortado está hachurado. Os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ devem ser colados para formar o chapéu no formato de cone.



Como $\theta = 2\pi/3$, o comprimento x do arco AB é dado por $x = (2\pi/3) \cdot 30 = 20\pi$.

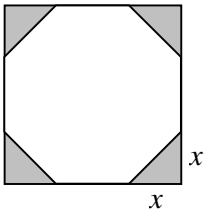
Por outro lado, na construção do chapéu no formato de um cone circular, x é o comprimento da circunferência de raio r que formará a base do cone. Assim, $x = 2\pi r$.

Comparando as duas expressões, obtém-se $r = 10$. Portanto, a área πr^2 da base do chapéu é 100π cm^2.

1.2 – **QUESTÕES DISCURSIVAS**

01. De um piso quadrado de 34 cm de lado recortam-se pequenos triângulos retângulos isósceles de cateto x, de modo a obter um piso em forma de octógono regular, conforme ilustra a figura abaixo.

Considere $\sqrt{2} = 1{,}4$.



a) Determine o valor de x.

b) Calcule a área de um dos triângulos recortados.

c) Calcule a área do octógono.

CONTEÚDO:

GEOMETRIA PLANA – Triângulos e polígonos. Área de polígonos.

RESOLUÇÃO:

a) Seja l o lado do octógono. Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que $l = x\sqrt{2}$. Considerando $\sqrt{2} = 1{,}4$ obtém-se $l = 1{,}4x$.

Por outro lado, $l = 34 - 2x$. Portanto, $x = 10$ cm.

b) Seja S a área de um dos triângulos recortados. Assim, $S = \frac{1}{2}x \cdot x = \frac{1}{2}10 \cdot 10$, isto é, $S = 50$ cm^2.

c) Seja A a área do octógono. Da geometria do problema, conclui-se que $A = 34^2 - 4 \cdot 50$, isto é, $A = 956$ cm^2.

02. Considere os pontos $A = (2, -2)$ e $B = (0, 4)$ do plano euclidiano.

a) Determine o valor da constante k para que a reta $y = kx + k$ passe pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

b) Calcule a distância da origem $(0,0)$ à reta obtida no item anterior.

CONTEÚDO:

GEOMETRIA ANALÍTICA – Distância de um ponto a uma reta. Perpendicularismo. Posição relativa de retas.

RESOLUÇÃO:

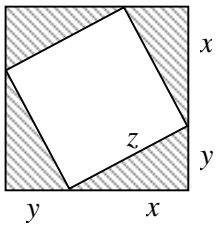
a) O ponto médio de $\overline{AB}$ é $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$ = (1, 1).

Pelo fato de a reta passar pelo ponto (1, 1), segue que $1 = k \cdot 1 + k$, ou seja, $k = \frac{1}{2}$.

b) Como $k = \frac{1}{2}$, a declividade da reta perpendicular é – 2. Como esta reta deve passar no ponto $(0,0)$, sua equação é $y = -2x$. As retas $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ e $y = -2x$ se interceptam no ponto $\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

A distância da origem $(0,0)$ à reta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ é a distância d da origem ao ponto $\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$. Assim, $d = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

03. Na figura abaixo, o quadrado de lado $x + y$ tem área Q e está decomposto em um quadrado de lado z e quatro triângulos retângulos congruentes de catetos x e y. Seja q a área do quadrado menor e seja t a área de cada triângulo.



a) Simplificando a equação $Q = q + 4t$, demonstre que $z^2 = x^2 + y^2$.

b) A demonstração que você fez no item anterior corresponde à do famoso Teorema de Pitágoras. Complete o enunciado deste teorema: "*Em um triângulo retângulo, ...*

CONTEÚDO:

GEOMETRIA PLANA – Triângulos. Áreas.

RESOLUÇÃO:

a) Pelo enunciado, $Q = (x + y)^2$, $q = z^2$ e $t = \frac{1}{2} x \cdot y$. Como $Q = q + 4t$, tem-se que $x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} xy$. Portanto, $z^2 = x^2 + y^2$.

b) Teorema de Pitágoras: "Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos".

04. Uma indústria pode produzir, por dia, até 20 unidades de um determinado produto. O custo C (em R$) de produção de x unidades desse produto é dado por:

$$C(x) = \begin{cases} 5 + x(12 - x) & \text{se } 0 \le x \le 10 \\ -\dfrac{3}{2}x + 40 & \text{se } 10 < x \le 20 \end{cases}$$

a) Se, em um dia, foram produzidas 9 unidades e, no dia seguinte, 15 unidades, calcule o custo de produção das 24 unidades.

b) Determine a produção que corresponde a um custo máximo.

CONTEÚDO:

FUNÇÕES – Conceito de função. Imagem. Gráficos. Função quadrática.

RESOLUÇÃO:

a) O custo de produção das 24 unidades é $C(9) + C(15)$, onde

$C(9) = 5 + 9\,(12 - 9) = 32$ e $C(15) = -\dfrac{3}{2} \cdot 15 + 40 = \dfrac{35}{2}$.

Assim, o custo de produção é R$ 49, 50.

b) Basta calcular o custo máximo no intervalo [0, 10], já que a função é decrescente no intervalo [10, 20]. No intervalo [0, 10], a função custo é a função quadrática $y = -x^2 + 12x + 5$. O gráfico é uma parábola de concavidade voltada para baixo, cujo vértice é o ponto de abscissa $x = 6$. Logo, a produção que corresponde ao custo máximo é de 6 unidades.

05. O inteiro 2 é raiz do polinômio $p(x) = 4x^3 - 4x^2 - 11x + k$, onde k é uma constante real.

a) Determine o valor de k.

b) Determine as outras raízes de $p(x)$.

c) Determine os intervalos onde $p(x) > 0$.

CONTEÚDO:

POLINÔMIOS – Zeros de polinômios. Divisão de polinômio.

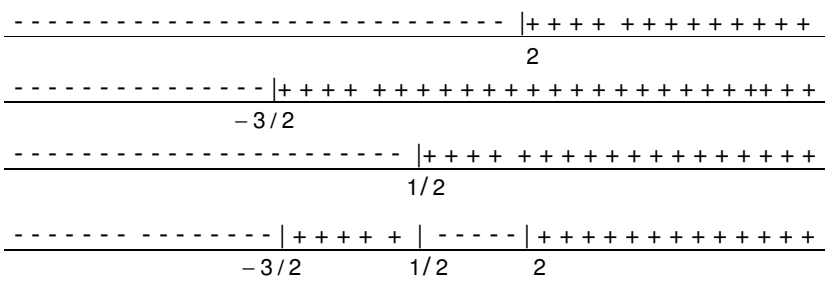
RESOLUÇÃO:

a) Sendo $p(2) = 0$, tem-se $4 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 + k = 0$, isto é, $k = 6$.

b) Sendo 2 uma das raízes, o polinômio $p(x) = 4x^3 - 4x^2 - 11x + 6$ é divisível por $x - 2$. O quociente dessa divisão é o polinômio $4x^2 + 4x - 3 = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Portanto, as outras raízes de $p(x)$ são $-\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

c) O sinal de $p(x) = 4(x-2)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ pode ser obtido combinando os sinais dos monômios.



Assim, os intervalos em que $p(x) > 0$ são $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $(2, \infty)$.